

Janvier 2024



Première année : mathématiques

Contrôle terminal – 2h

Tout document interdit ; calculatrice de la faculté autorisée

Questions de cours

Retrouver les propriétés de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à partir de produits scalaires.

Donner la définition d'un nombre complexe.

Expliciter le produit de deux nombres complexes z et z' à partir de leurs modules ρ, ρ' et arguments θ, θ' . Le démontrer.

Donner *deux exemples* de deux fonctions réciproques l'une de l'autre.

Dans la décomposition en série de Fourier d'une fonction $f(t)$, rappeler les définitions des coefficients a_0, a_n et b_n ; dans le cas spécifique où $f(t)$ est une fonction paire, réexprimer ces trois coefficients.

Nombres complexes

On considère si $x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ la fonction $f(x) = (1 + j \tan x) / (1 - j \tan x)$. Donner les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument de $f(x)$. En déduire l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Dérivation

Calculer la dérivée de la fonction définie par : $c(x) = x \ln(x + 2)$,

Intégration par parties : $B = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$.

Equations différentielles

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$y'' + \omega^2 y = 1,$$
$$y'' - 2y' + 10y = 5.$$

Equation différentielle : parachute

Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note $k = 30 \text{ Nm}^{-2}\text{s}^2$ ce coefficient de proportionnalité, et $m = 80 \text{ kg}$ la masse du parachutiste.

1. Montrer que l'équation différentielle dont la vitesse v est solution est $v' = -kv^2/m + g$.
2. Résoudre l'équation du mouvement si la vitesse initiale est de $v(0) = 200 \text{ km h}^{-1}$, vitesse "limite" atteint lors de la chute libre.